Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Segundo parcial

28 de noviembre de 2019

1. **(7 puntos)** Sea $p \in [1, \infty)$, y supongamos que (a_{ij}) es una matriz tal que $Tx(i) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x(j)$ define un elemento $Tx \in \ell^p$ para todo $x \in \ell^p$. Probar que $T \in B(\ell^p)$.

2. **(4 puntos)** Mostrar que la norma del supremo en $C([a, b])$ no proviene de un producto interno.

3. **(14 puntos)** El *operador de Volterra* $V : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ está dado por

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

   a) Mostrar que $V^*y(s) = \int_s^1 y(t)dt$.

   b) Hallar los valores y vectores propios de VV^*, y demostrar que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$ (notar que si x es un vector propio con valor propio λ, entonces x es una función de clase C^∞ que satisface la ecuación diferencial $\lambda x'' + x = 0$, y $x(0)$ y $x'(1)$ se conocen).

4. **(25 puntos)** Sean X un espacio de Banach, Y un subespacio de X, y $\varphi \in Y'$. Se define

$$C_\varphi := \{\psi \in X' : \ \psi|_Y = \varphi \text{ y } \|\psi\| \leq 2\|\varphi\|\}.$$

   a) Probar que $\operatorname{ext}(C_\varphi) \neq \emptyset$ (sugerencia: probar que C_φ es convexo, no vacío, y w^*-compacto).

   b) Supóngase que X es un espacio de Hilbert.

   - ◇ Describir el conjunto C_φ en términos de los elementos de X.
   - ◇ Calcular $\operatorname{ext}(C_\varphi)$ (notar que $\operatorname{ext}(x + C) = x + \operatorname{ext}(C)$, $\forall x \in X$).